Primitive

① Să se calculeze : a) $\int \frac{x^2-3x+2}{x-1}\,dx$, $x>1$;

b) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx$, $x\in\mathbb{R}$; c) $\int \frac{x^4+4}{x^2+2x+2}\,dx$, $x\in\mathbb{R}$;

d) $\int \frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 2x}\,dx$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; e) $\int 3^x\cdot 5^{2x+1}\,dx$;

f) $\int \ln\left(2^x+2^{x+1}\right)dx$, $x\in\mathbb{R}$; g) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}}\,dx$, $x>0$

h) $\int (x+1)^{20}+(x-1)^{20}\,dx$, $x\in\mathbb{R}$; i) $\int (x^2+1)\cdot e^x+2x\cdot e^x\,dx$.

② Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Dacă F este o primitivă a lui f pentru care $F(0)=1$, atunci să se calculeze $F(1)+F(-1)$.

③ Să se arate că următoarele funcții admit primitive : a) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x-1}, & x\leq 0\\ x\ln x, & x\in(0,1)\\ e^{-x}-e^{-1}, & x\geq 1\end{cases}$

④ Să se arate că următoarele funcții nu admit primitive : a) $f(x)=\begin{cases}\cos^2\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\in\mathbb{Q}\\ x^4, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

⑤ Să se determine $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisface relațiile : $f(x)\cdot F(2-x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și $f(1)=1$, unde F este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

⑥ Să se determine $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ continuă cu proprietatea că $f(x)\cdot F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$, $\forall x\in(0,\infty)$ unde F este o primitivă a lui f și $a\in\mathbb{R}^*$.