Model de teză

Clasa a XI-a, Semestrul I

I 1. Calculați signatura permutării
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_5.$$

2. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calculați $\det(4A)$.

3. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{4n^4+n+3}}$.

4. Dați exemplu de șir convergent, care nu este monoton.

II 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Să se calculeze $\det(A)$;

b) Să se verifice relația $A\cdot(A^2+6I_3)=O_3$

c) Să se arate că $\det(xI_3+A^2)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul cu termenul general $a_n = \dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$, $n\geq 2$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$.

a) Verificați identitatea $\dfrac{x^3-1}{x^3+1} = \dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{f(x-1)}{f(x)}$.

b) Arătați că $a_n = \dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$, $\forall n\geq 2$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3a_n}{2}\right)^{n^2}$.