

Model de teză
Clasa a XII-a , Semestrul I

I 1. Determinați elementele inversabile ale mulțimii (\mathbb{Z}_8, \cdot) .

2. Pe \mathbb{R} se consideră legea de compoziție " \circ " definită prin $x \circ y = xy - x - y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
Determinați $e \in \mathbb{R}$ a.p. $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
și $f \in \mathbb{R}$ a.p. $x \circ f = f \circ x = f$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ și $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ două permutări din (S_4, \cdot) . Determinați ordinul elementelor τ , θ și $\tau \circ \theta$ în grupul (S_4, \cdot) .

4. Calculați $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^2}) dx$.

5. Fie $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^3 \cdot \ln(x^2 + 2)$ o primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determinați f .

6. Studiați integrabilitatea funcției:

$$f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2, & \text{dacă } x=1 \\ e^{\frac{1}{x-1}}, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases}$$

II Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a) / X(a) = I_2 + aA, a \in \mathbb{R}\}$

a) Să se arate că $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avem:

$$X(a) \cdot X(b) = X(a) \quad \text{și} \quad X(a) \cdot X(b) = X(a+b-10ab)$$

b) Să se arate că mulțimea $H = \{X(a) / a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor;

c) Să se rezolve ecuația $X^2 = I_2$, $X \in G$.

III 1) Calculați $\int_1^{64} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} dx$;

2) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n+k}}$.