Model de teză

Clasa a XI-a, Semestrul I

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ și mulțimea $A = \{\sigma^n / n \in \mathbb{N}^*\}$.

   a) Să se determine inversiunile lui σ;

   b) Să se determine $card(A)$;

   c) Să se arate că toate elementele mulțimii A sunt permutări pare.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ unde $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) Să se arate că $\det(A) = (a-b)(a-1)$.

   b) Să se calculeze $\det(A - {}^tA)$.

   c) Dacă $a = b = 0$, să se calculeze A^3.

3. Calculați:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-n-1} - n + 3\right)$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)^{\sqrt{n^2+4}}$;

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n \cdot n^2}{n!}$;

4. Se consideră șirurile $a_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}$, $b_n = a_n + \dfrac{1}{n}$, $c_n = a_n + \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   Admitem cunoscut faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

   a) Arătați că $(b_n)_{n\geq 1}$ e strict descrescător și $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător;

   b) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{\pi^2}{6}$;

   c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a_n - \dfrac{\pi^2}{6}\right) = 1$.