Model de teză

Clasa a XII-a, Semestrul I

I 1. Fie $G=(\sqrt{2},\infty)$ și $x*y=\sqrt{x^2y^2-2x^2-2y^2+6}$.

a) Demonstrați că $(G,*)$ este grup abelian;

b) Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:(0,\infty)\to(\sqrt{2},\infty)$, $f(x)=\sqrt{ax+b}$ să fie un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ și $(G,*)$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & \ln x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}, x>0\right\}$

a) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x\cdot y)$, $\forall x,y>0$.

b) Calculați $A(2)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$;

c) Arătați că $(G,\cdot)\simeq(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

II 1. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

a) Determinați primitivele funcției f;

b) Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(1,\infty)$;

c) Aflați primitiva F a lui f pentru care avem $F(e^{e-1})=2$.

2. Se consideră integralele $I_n=\int_2^3 \dfrac{x^n}{x^2-1}dx$ unde $n\in\mathbb{N}$.

Să se calculeze I_0, I_1, I_2, I_3.