

Model de teză la matematică
Cls. XII, Sem. I

① Se consideră mulțimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / m, n \in \mathbb{Z}_5, m = \pm 1 \right\}$

a) Să se verifice că dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $B \cdot A = A^{-1} \cdot B$;

b) Să se arate că (H, \cdot) este grup cu 10 elemente;

c) Să se determine numărul elementelor de ordin 2 din grupul H .

② Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție „ $*$ ” definită prin $x * y = 2xy + 2x + 2y + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $x * y = 2(x+1)(y+1) - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, astfel încât $a * b \in \mathbb{N}$;

c) Să se calculeze $(-2015) * (-2014) * \dots * 0 * 1 * \dots * 2015$.

③ a) Arătați că $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$ este o primitivă a funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

b) Calculați $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x \, dx$;

④ Calculați primitivele funcțiilor:

a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-2)(2x+1)}{x}$;

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$;

c) $f: (4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x-10}{x^2-5x+4}$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \cos x$.