

# Model de teză la matematică

Clas. XII, Sem. I

① Pe  $G = (3, \infty) \setminus \{4\}$  se consideră legea de compoziție

$$x * y = (x-3) \ln(y-3) + 3.$$

a) Să se arate că  $G$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea „ $*$ ”;

b) Să se studieze asociativitatea, comutativitatea și existența elementului neutru pentru legea „ $*$ ”;

c) Să se rezolve ecuația  $x * x * x * x = e^{16} + 3$ .

② Fie mulțimea  $F = \{f_a / f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = \lg[(2+10^{2x})^a - 2], a \in \mathbb{R}^*\}$ ,

a) Să se arate că  $f_a \circ f_b = f_{a \cdot b}, \forall a, b \in \mathbb{R}^*$ ;

b) Să se arate că  $(F, \circ)$  este grup abelian;

c) Calculați  $\underbrace{f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_n, n \in \mathbb{N}^*$ .

③ Fie  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ .

a) Calculați  $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$ ;

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k^3}$ ;

④ Determinați  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\int_0^3 |x-a| dx = 3$ .

⑤ Fără a calcula integrala, arătați că:

$$\frac{2}{e} \leq \int_0^2 e^{x^2-2x} dx \leq 2$$

⑥ Calculați primitivele funcțiilor:

a)  $f(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2}, x > 0$ ;

b)  $f(x) = \arctg x, x \in \mathbb{R}$ ;

c)  $f(x) = e^x$ , sau  $e^x, x \in \mathbb{R}$ ;